數學傳播　50卷1期, pp. 145-147

應用極座標法證明蘭勃特定理

于志洪

蘭勃特 (Lambert, 1728～1777) 定理是平面解析幾何中的著名定理, 它有著較多的證明方法。本文採用極座標法證明, 不僅思路簡捷、證題明快, 而且富有規律、不需添輔助線, 此法對於拓寬視野、啟迪思維、提高證題能力和解題速度都有一定作用。

蘭勃特定理 求證: 拋物線的外切三角形的外接圓必過其焦點。

證明 1: 如圖 1, 以焦點 F 爲極點, 過 F 作準線 L 的垂線, 其反向延長線 FX 爲極軸建立極座標系。則拋物線的極座標方程爲 $\rho=\dfrac{P}{1-\cos\theta}$。

設 A_i $(i=1,2,3)$ 爲拋物線上任意三點, 其極角分別爲: $\theta_1,\theta_2,\theta_3$。過 A_i $(i=1,2,3)$ 三點的切線方程爲:

$$\frac{P}{\rho}=\cos(\theta-\theta_1)-\cos\theta, \qquad (1)$$

$$\frac{P}{\rho}=\cos(\theta-\theta_2)-\cos\theta, \qquad (2)$$

$$\frac{P}{\rho}=\cos(\theta-\theta_3)-\cos\theta. \qquad (3)$$

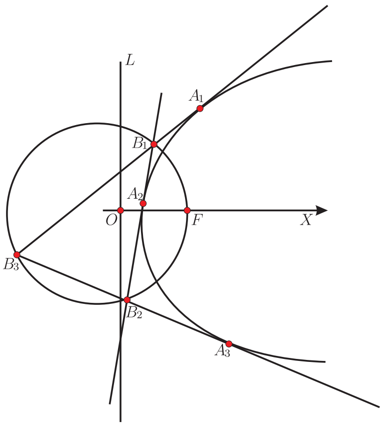

圖 1

$\therefore$ (1)−(2), 得 $\cos(\theta-\theta_1)-\cos(\theta-\theta_2)$

$\therefore$ $\theta-\theta_1=2n\pi\pm(\theta-\theta_2)$ ($n\in$ 整數)

而 A_2, A_3 是不同的兩點, 故上式括弧前不能取正號, 因此有 $\theta-\theta_1=2n\pi-(\theta-\theta_2)$, $\therefore$ $n\pi+\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$, 取 $n=0$, 則 $\theta=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$, 將其再代入 (1) 或 (2) 中, 即可求得

$$\rho=\frac{P}{\cos\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}-\theta_1\right)-\cos\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}}=\frac{P}{\cos\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2}-\cos\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}}=\frac{P}{2\sin\dfrac{\theta_1}{2}\sin\dfrac{\theta_2}{2}}$$

$$=\frac{P}{2}\csc\frac{\theta_1}{2}\csc\frac{\theta_2}{2}.$$

因此得過 A_1 和 A_2 兩切線交點的座標爲: $B_1\Big(\dfrac{P}{2}\csc\dfrac{\theta_1}{2}\csc\dfrac{\theta_2}{2},\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\Big)$。
同理由輪換性可得 B_2 和 B_3 的座標分別爲:

$$B_2\Big(\frac{P}{2}\csc\frac{\theta_2}{2}\csc\frac{\theta_3}{2},\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\Big),\quad B_3\Big(\frac{P}{2}\csc\frac{\theta_3}{2}\csc\frac{\theta_1}{2},\frac{\theta_3+\theta_1}{2}\Big).$$

顯然 B_1、B_2、B_3 三點的座標滿足圓的方程:

$$\rho=\frac{P}{2}\csc\frac{\theta_1}{2}\csc\frac{\theta_2}{2}\csc\frac{\theta_3}{2}\sin\Big(\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}-\theta\Big).$$

這表示半徑爲 $R=\dfrac{P}{4}\csc\dfrac{\theta_1}{2}\csc\dfrac{\theta_2}{2}\csc\dfrac{\theta_3}{2}$, 圓心爲 $O\Big(R,\dfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\Big)$ 的 $\triangle B_1B_2B_3$ 的外接圓。由於焦點 F 是極點, 故圓心與焦點的連線 $|OF|=R=$ 圓心 O 的極徑, 所以此圓過拋物線的焦點。

證明2: 如圖 2, 以焦點 F 爲極點, 過 F 作準線 L 的垂線的延長線爲極軸建立極座標系。則拋物線的極座標方程爲 $\rho=\dfrac{P}{1+\cos\theta}$,

設 A_i 爲拋物線上任意三點, 其極角分別爲 θ_i $(i=1,2,3)$ 於是過 A_i 三點的切線方程分別爲:

$$\frac{P}{\rho}=\cos(\theta-\theta_1)-\cos\theta, \qquad (4)$$
$$\frac{P}{\rho}=\cos(\theta-\theta_2)-\cos\theta, \qquad (5)$$
$$\frac{P}{\rho}=\cos(\theta-\theta_3)-\cos\theta. \qquad (6)$$

$\therefore$ 仿照證明 1, (4)$-$(5), 得 $\theta=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$

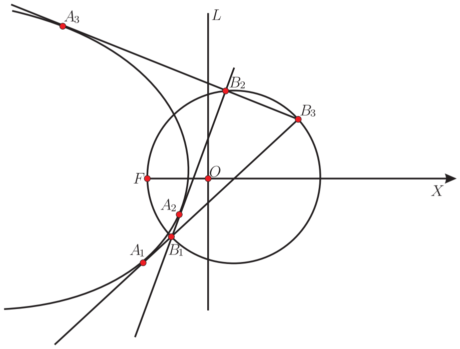

圖2

將其代入 (4) 或 (5) 中, 可求得

$$\rho=\frac{P}{2\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}}=\frac{P}{2}\sec\frac{\theta_1}{2}\sec\frac{\theta_2}{2}.$$

因此可得兩切線兩兩交點的座標分別爲: $B_1\Big(\dfrac{P}{2}\sec\dfrac{\theta_1}{2}\sec\dfrac{\theta_2}{2},\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\Big)$,

$$B_2\Big(\frac{P}{2}\sec\frac{\theta_2}{2}\sec\frac{\theta_3}{2},\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\Big),\quad B_3\Big(\frac{P}{2}\sec\frac{\theta_3}{2}\sec\frac{\theta_1}{2},\frac{\theta_3+\theta_1}{2}\Big).$$

顯然 B_1、B_2、B_3 三點的座標滿足圓的方程:

$$\rho=\frac{P}{2}\sec\frac{\theta_1}{2}\sec\frac{\theta_2}{2}\sec\frac{\theta_3}{2}\cos\Big(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\Big).$$

這表示半徑爲 $R=\dfrac{P}{4}\sec\dfrac{\theta_1}{2}\sec\dfrac{\theta_2}{2}\sec\dfrac{\theta_3}{2}$, 圓心爲 $O\Big(R,\dfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2}\Big)$ 的 $\triangle B_1B_2B_3$ 的外接圓。由於焦點 F 是極點, 故圓心與焦點的連線 $|OF|=R=$ 圓心 O 的極徑。所以此圓過拋物線焦點。

綜上所述, 應用極座標法證明蘭勃特定理, 其實是證明四點共圓的問題, 其關鍵在於正確選擇座標系, 巧妙運用兩切線交點座標的輪換性, 求得圓的方程, 然後說明拋物線焦點的座標滿足圓的方程即可。

此法不僅思路簡捷, 證題明快, 而且富有規律, 不添加輔助線, 因而對於開闊視野、提高證題水平均有一定作用。

參考文獻

1. 于志洪。極座標法證郎古萊定理及其推廣 [J]。美國: 太平洋數學雜誌, 1996, 186 (2)。
2. 于志洪。極座標法證西摩松定理及其推廣 [J]。香港: 學校數學通訊, 1998, (16)。
3. 于志洪。極座標法證一定理及其推廣 [J]。北京: 數學通報, 1990, (2)。
4. 于志洪。極座標法證三點共線 [J]。上海: 數學教學, 1984, (4)。
5. 四川省數學會。數學課外活動 (高中二年級) [M]。重慶: 重慶出版社, 1983。
6. 林華。圓錐曲線 [M]。杭州: 浙江人民出版社, 1982。
7. 唐秀穎。數學解題辭典 (平面解析幾何) [M]。上海: 上海辭書出版社, 1983。

—本文作者中國江蘇省泰州中學附屬初級中學退休教師—